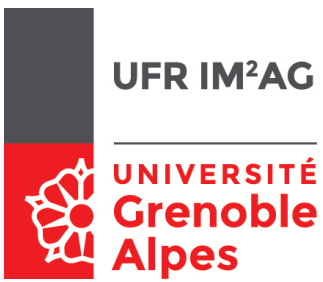
Introduction à la preuve d'algorithmes

DIU EIL – bloc 2

Vincent Danjean
en utilisant les supports de Benjamin Wack



2020 – 2021

Auparavant

- Écriture d'algorithmes itératifs et récursifs
- Coût d'un algorithme
- Tests de programmes

Aujourd'hui : preuves d'algorithmes

- Invariant, précondition, postcondition
- Spécification et correction d'un algorithme
- Terminaison d'un algorithme

Plan

Preuve de correction d'un algorithme
- Spécification formelle
- Formalisation du langage
- Annotations de programmes

Terminaison d'un algorithme

Drapeau Hollandais
- Le problème et l'algorithme
- Analyse de l'algorithme

Les besoins

- Quantité astronomique de code en circulation ou en développement
  (Google Chrome ou serveur World of Warcraft : 6 M lignes)
  (Windows 7 ou Microsoft Office 2013 : 40 M lignes)

  `http://www.informationisbeautiful.net`
- Omniprésence dans des systèmes critiques : finance, transports, économie, santé...
- Il faut pouvoir prouver qu'un programme s'exécute correctement dans toutes les situations

Mais correct selon quels critères ? Quelles situations à considérer ?

- Spécification
  - des données acceptables
  - du résultat attendu (généralement en fonction des données)
- exprimée dans un langage formel, généralement une propriété logique des données et du résultat.
- ne décrit **pas comment** fonctionne le programme.

Les propriétés recherchées

Terminaison

L'exécution de l'algorithme produit-elle un résultat en temps fini **quelles que soient** les données fournies ?

Correction partielle

Lorsque l'algorithme s'arrête, le résultat calculé est-il la solution cherchée quelles que soient les données fournies ?

Terminaison + correction partielle = correction totale

Quelles que soient les données fournies, l'algorithme s'arrête et donne une réponse correcte.

Pour certains problèmes il n'existe **que** des algorithmes **partiellement** corrects !

Une première écriture formelle

Soit un problème instancié par une donnée D et dont la réponse est fournie par un résultat R.

Une spécification peut être donnée sous la forme de :

- une propriété $P(D)$ de la donnée *(précondition)* ;
- une propriété $Q(D, R)$ de la donnée et du résultat *(postcondition)*.

Un programme satisfait cette spécification si :

Pour toute donnée D qui vérifie la propriété P,
l'exécution du programme donne un résultat R qui vérifie Q.

Le programme est alors dit correct *par rapport à* cette spécification.

Division euclidienne

Division par soustractions

DIV(a, b)
Données : Deux entiers a et b
Résultat : Le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b

$r := a$
$q := 0$
while $r \geq b$
  $r := r - b$
  $q := q + 1$
return q, r

Données acceptables

- $b \neq 0$ sinon le problème n'a pas de sens (et la boucle non plus)
- $b > 0$ (?)
- $a > 0$ (?)

Division euclidienne

Division par soustractions

DIV(a, b)
Données : Deux entiers a et b
Résultat : Le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b

$r := a$
$q := 0$
while $r \geq b$
  $r := r - b$
  $q := q + 1$
return q, r

Résultat attendu

- $a = q \times b + r$
- $0 \leq r < b$
- a et b inchangés

Le langage de programmation

Afin de pouvoir raisonner formellement, on fixe une syntaxe restreinte sur le langage de « programmation » utilisé :

- expressions E
  constituées de variables, de constantes et d'opérations ($+$, $*$, ...)
- expressions booléennes B
  constituées de comparaisons et de connecteurs (`and`, `or`, ...)
- une instruction I peut être :
  - une affectation `x` $:= E$
  - une séquence I_1 ; I_2
  - une conditionnelle `if` B `then` I_1 `else` I_2
  - une boucle `while` B `do` I

On peut alors raisonner **par cas** et **par induction** sur la forme du programme considéré.

- Pas de *for* (utiliser *while*)
- Pas de structures de données (mais possibilité d'étendre le langage)
- Pas d'appel de fonction (et donc pas de récursivité)

Le langage des propriétés

Les propriétés que nous exprimons à propos des données et des résultats sont généralement des **formules de logique du premier ordre** :

- connecteurs logiques $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$
- quantificateurs $\forall$, $\exists$
- opérations et prédicats usuels sur les données ($+$, $*$, $<$, $=$...)

La plupart des variables sont partagées par le programme et les propriétés, certaines ne sont utilisées que dans les propriétés.

Attention

Une propriété des variables peut être vraie ou fausse à un point donné de l'exécution d'un programme, et selon les données initiales.

Ne pas confondre

expression booléenne évaluée dans une exécution du programme

propriété utilisée dans la démonstration

Ne pas confondre

assertion utilisée dans le test de programme, évaluée systématiquement et qui lève une exception si elle est fausse

propriétés (parfois appelées assertions !) sans se prononcer *a priori* sur leur valeur de vérité

Notion d'invariant

Idée de la démonstration d'un algorithme

De proche en proche, établir que la postcondition est vraie à chaque fois que la précondition est vraie.

- Affectation, séquence, condition :
  pas de vrai problème si la spécification est correctement écrite.
- Problème : la boucle
  (peut recevoir ses données d'une itération précédente)

Invariant

Un invariant est une propriété P des variables en début de boucle telle que

si P est vérifiée à une itération, alors elle l'est à l'itération suivante.

Méthodologie

1. **Choisir et exprimer** un invariant *judicieux*
   Pas de méthode systématique
2. **Démontrer** qu'il est vérifié avant d'entrer dans la boucle
   Utiliser les préconditions
3. **Démontrer** que s'il est vérifié au début d'une itération quelconque, il l'est aussi au début de l'itération suivante.
   Utiliser le corps de la boucle
   On note x' la valeur de x en fin de boucle
4. **Instancier** l'invariant en sortie de boucle et en déduire une postcondition.
   *Utiliser (la négation de) la condition du **while***

Annotation de la division euclidienne

Division par soustractions

DIV(a, b)
Données : Deux entiers a et b
Résultat : Le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b
Précondition : $a \geq 0$ et $b > 0$

$r := a$
$q := 0$
while $r \geq b$ $\quad \{\textit{invariant} : \mathtt{a} = \mathtt{b} \times \mathtt{q} + \mathtt{r}\}$
  $r := r - b$
  $q := q + 1$
  $\{ \mathtt{b} \times \mathtt{q}' + \mathtt{r}' = \mathtt{b} \times (\mathtt{q}+1) + (\mathtt{r} - \mathtt{b}) = \mathtt{b} \times \mathtt{q} + \mathtt{b} - \mathtt{b} + \mathtt{r} = \mathtt{b} \times \mathtt{q} + \mathtt{r}$
  et par hypothèse de l'invariant $\mathtt{b} \times \mathtt{q} + \mathtt{r} = \mathtt{a}$ $\}$
return q, r
Postconditions : $\mathtt{a} = \mathtt{b} \times \mathtt{q} + \mathtt{r}$
$0 \leq \mathtt{r} < \mathtt{b}$ $\longleftarrow$ *(reste à démontrer)*
a et b inchangés $\longleftarrow$ *(reste à démontrer)*

Exercice

Quel(s) programme(s) calcule(nt) la factorielle de n dans la variable F ?

A

```
i := 0
F := 1
while i <= n
    i := i + 1
    F := F * i
```

C

```
i := 1
F := 1
while i <= n
    F := F * i
    i := i + 1
```

B

```
i := 0
F := 1
while i < n
    i := i + 1
    F := F * i
```

D

```
i := 0
F := 1
while i < n
    F := F * i
    i := i + 1
```

Programme A

i := 0
F := 1 $\quad \{F = 1 = 0! = i!\}$
while $i <= n$
$\quad \{F = i!\}$
$\quad$ i := i + 1
$\quad$ F := F * i
$\quad\quad \{F' = F * i' = F * (i+1) = i! * (i+1) = (i+1)!$ donc $F' = i'!\}$

Invariant

$$F = i!$$

Mais en sortie de boucle $i = n+1$ d'où $F = (n+1)!$

Programme B!

i := 0
F := 1 $\quad \{F = 1 = 0! = i!\}$
while $i < n$
$\quad \{F = i!\}$
$\quad$ i := i + 1
$\quad$ F := F * i $\quad \{F' = F * i' = i! * (i+1) = (i+1)!$ donc $F' = i'!\}$

Invariant

$$F = i!$$

En sortie de boucle $\{i = n$ d'où $F = n!\}$

Programme $C!$

i := 1
F := 1 $\{F = 1 = 0! = (1-1)! = (i-1)!\}$
while $i <= n$
$\{F = (i-1)!\}$
F := F * i
i := i + 1 $\{F' = F * i = (i-1)! * i = i!$ donc
$F' = (i+1-1)! = (i'-1)!\}$

Invariant

$F = i!$ ~~$F = i!$~~ alors en fin d'itération $F' = F * i = i! * i \neq i'!$: NON

$$F = (i-1)!$$

En sortie de boucle i = n+1 d'où F= n !

Programme D

```
i := 0
F := 1
while i < n
    F := F * i
    i := i + 1
```

Invariant

$F = (i-1)!$ ~~$F = (i-1)!$~~ correctement propagé par la boucle
mais faux à l'entrée de la boucle : NON

En réalité on a toujours $F = 0$ après la 1è itération.

Correction partielle ou totale

Correction partielle

Pour toute donnée D qui vérifie la précondition P,
si le programme se termine,
alors son exécution donne un résultat R qui vérifie la postcondition Q.

Correction totale

Pour toute donnée D qui vérifie la précondition P,
l'exécution du programme se termine
et donne un résultat R qui vérifie la postcondition Q.

$$\text{Correction partielle} \wedge \text{terminaison} \Rightarrow \text{Correction totale}$$

Variant de boucle

Variant de boucle

Un **variant de boucle** est une expression :

- entière
- positive
- qui décroît **strictement** à chaque itération

Variants usuels

- i pour une boucle du type **for** $i = n$ **downto** 1
- $n - i$ pour une boucle du type **for** $i = 1$ **to** n
- $j - i$ pour deux variables i croissante et j décroissante
- ...
- mais pas de technique « systématique »

Variant de la division euclidienne

Division par soustractions

DIV(a, b)
Données : Deux entiers a et b
Résultat : Le quotient q et le reste r de la division euclidienne de a par b
Précondition : $a \geq 0$ et $b > 0$

$r := a$
$q := 0$
while $r \geq b$ $\quad \{\mathtt{r} = n\}$
  $r := r - b$
  $q := q + 1$ $\quad \{0 \leq \mathtt{r} < n\}$
return q, r

- r est clairement un variant de boucle
- On peut le formuler dans les annotations existantes grâce à une nouvelle variable logique.
  (n est quantifiée existentiellement de façon implicite)
- La preuve de $\mathtt{r} < n$ en fin de boucle repose sur la précondition $b > 0$ et sur la condition du `while`.

Les difficultés

Précondition et postcondition

- généralement faciles à écrire si le problème est correctement spécifié
- éventuellement nécessaire de renforcer la précondition si la preuve n'aboutit pas
- attention aux postconditions trop faibles *(exemple du tri)*

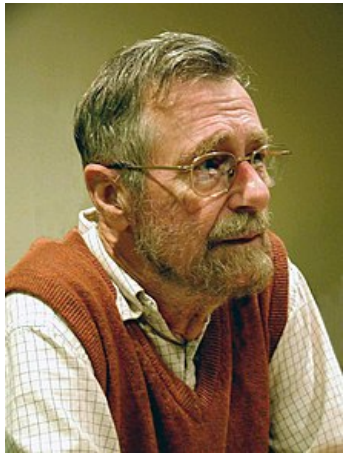
Invariants

- incluent souvent une généralisation de la postcondition
- demandent une compréhension fine de l'algorithme
- les trouver peut même précéder l'écriture de l'algorithme

Variants

- souvent immédiats, mais des cas particuliers très difficiles
- nécessitent parfois de s'appuyer sur les autres assertions

Le drapeau hollandais (1976)



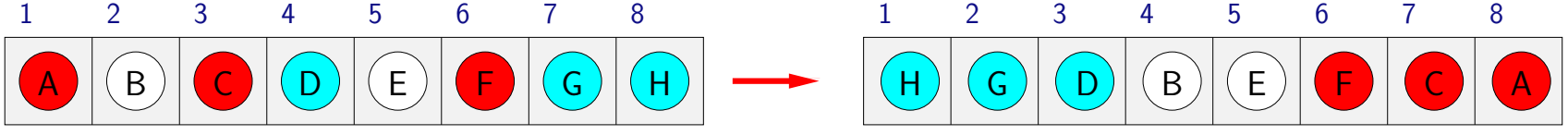
E.W. Dijkstra (1930-2002)

- un des fondateurs de la science informatique
- algorithme de recherche de plus court chemin
- pile de récursivité pour ALGOL-60
- Turing Award 1972

Tableau de n éléments, chacun coloré en bleu, blanc ou rouge.

Objectif : réorganiser le tableau pour que :

- les éléments bleus soient sur la partie gauche
- les éléments blancs au centre
- les rouges en fin de tableau

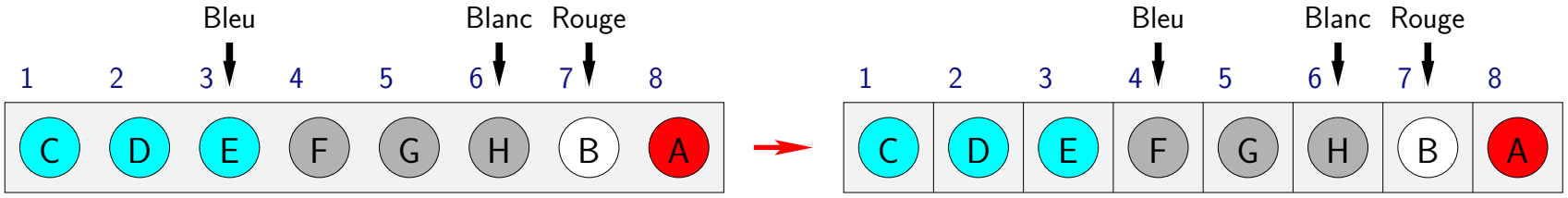


Contrainte : utiliser un minimum de mémoire supplémentaire (en place)

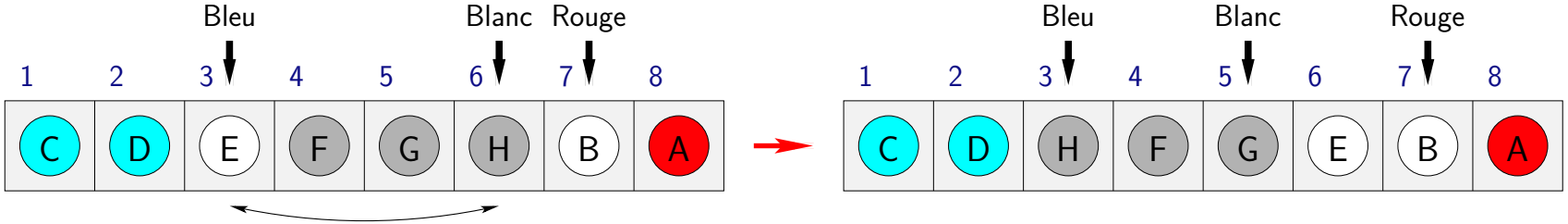
Les trois cas

Trois indices mémorisant où placer le prochain élément de chaque couleur

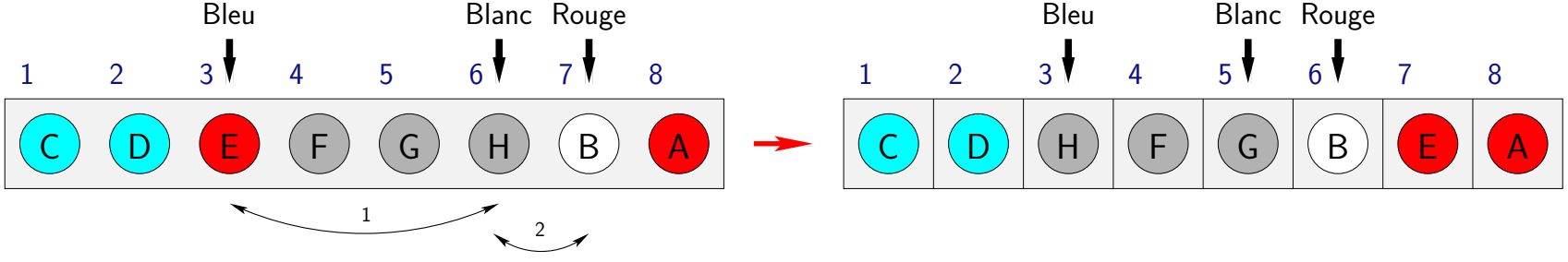
- Cas bleu



- Cas blanc



- Cas rouge



L'algorithme

DRAPEAU(T)

Données : Un tableau T de N éléments colorés (*bleu*, *blanc* ou *rouge*)
Résultat : T contient les mêmes éléments rangés par couleur croissante

$i_{bleu} = 1$
$i_{blanc} = N$ // i_k est l'indice de la place du
$i_{rouge} = N$ // prochain élément de couleur k
while $i_{bleu} \leq i_{blanc}$
  switch Couleur $(T[i_{bleu}])$ **do**
    case *bleu* **do**
      $i_{bleu} = i_{bleu} + 1$ // l'élément est en place
    case *blanc* **do**
      Échange (i_{bleu}, i_{blanc}) // on le place en bonne position
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1$
    case *rouge* **do**
      Échange (i_{bleu}, i_{blanc}) // permutation circulaire
      Échange (i_{blanc}, i_{rouge}) // pour libérer une case
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1$; $i_{rouge} = i_{rouge} - 1$

Complexité

- Nombre d'appels à la fonction `Couleur` = nombre d'itérations = N

$$\text{Coût}_{\texttt{Couleur}}(N) = N$$

  On évalue la couleur de chaque élément une et une seule fois.

- Nombre d'appels à la fonction `Échange` = somme du nombre d'échanges réalisés à chaque itération (0, 1 ou 2) :

$$0 \leq \text{Coût}_{\texttt{Échange}}(N) \leq 2N.$$

- Cas favorable = tableau rempli d'éléments bleus
- Cas défavorable = tableau rempli d'éléments rouges

La complexité de l'algorithme en nombre d'échanges est donc au pire en $\mathcal{O}(N)$ et au mieux en $\mathcal{O}(1)$.

Et en moyenne ? Ça dépend de la distribution des données !

Éléments de démonstration

$i_{bleu} = 1 \;\; ; \;\; i_{blanc} = N \;\; ; \;\; i_{rouge} = N$
while $i_{bleu} \leq i_{blanc}$
  switch `Couleur` $(T[i_{bleu}])$ **do**
    case *bleu* **do**
      $i_{bleu} = i_{bleu} + 1$
    case *blanc* **do**
      `Échange` (i_{bleu}, i_{blanc})
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1$
    case *rouge* **do**
      `Échange` (i_{bleu}, i_{rouge})
      `Échange` (i_{bleu}, i_{blanc})
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1 \;\; ; \;\; i_{rouge} = i_{rouge} - 1$

Terminaison : $i_{blanc} - i_{bleu}$ est un variant acceptable

- À chaque itération i_{bleu} augmente (cas 1) ou i_{blanc} diminue (cas 2 et 3).
- La condition du **while** assure que $i_{bleu} \leq i_{blanc}$.

$i_{bleu} = 1 \;\; ; \;\; i_{blanc} = N \;\; ; \;\; i_{rouge} = N$
while $i_{bleu} \leq i_{blanc}$
  switch `Couleur` $(T[i_{bleu}])$ **do**
    case *bleu* **do**
      $i_{bleu} = i_{bleu} + 1$
    case *blanc* **do**
      `Échange` (i_{bleu}, i_{blanc})
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1$
    case *rouge* **do**
      `Échange` (i_{bleu}, i_{rouge})
      `Échange` (i_{bleu}, i_{blanc})
      $i_{blanc} = i_{blanc} - 1 \;\; ; \;\; i_{rouge} = i_{rouge} - 1$

Invariant de boucle

- T contient une permutation des éléments du tableau initial.
- Les éléments de 1 à $i_{bleu} - 1$ sont de couleur *bleu*.
- Les éléments de $i_{blanc} + 1$ à i_{rouge} sont de couleur *blanc*.
- Les éléments de $i_{rouge} + 1$ à N sont de couleur *rouge*.

Démonstration

Préservation des éléments du tableau

Garantie par l'utilisation exclusive de la procédure **Échange**.

(mais cette propriété doit faire partie de la spécification de **Échange** !)

Rangement des couleurs

- À l'entrée dans la boucle cette propriété ne concerne aucun élément. (donc elle est vraie !)
- Au cours d'une itération :

  cas 1 : un élément *bleu* est placé, les autres sont inchangés
  cas 2 : un élément *blanc* est placé, les autres sont inchangés
  cas 3 : un élément *rouge* est placé, les éléments *blanc* sont décalés, les autres sont inchangés
- En sortie de boucle $i_{blanc} = i_{bleu} - 1$ donc :
  - Les éléments de 1 à $i_{bleu} - 1$ sont de couleur *bleu*.
  - Les éléments de i_{bleu} à i_{rouge} sont de couleur *blanc*.
  - Les éléments de $i_{rouge} + 1$ à N sont de couleur *rouge*.

Variantes

Même problème avec :

- 2 couleurs seulement *(c'est **Partition** pour le tri rapide)*
- plus de 3 couleurs *(exercice pour s'entraîner)*

Tri rapide avec plusieurs pivots :

- Remplacer **Partition** par le « drapeau » approprié
- Autant d'appels récursifs que de sous-tableaux formés
- Mais au final pas de gain (voire une perte) d'efficacité

En résumé

Aujourd'hui

- Un algorithme est démontré correct **par rapport à une spécification**
- Un invariant est une **propriété** préservée par une boucle, utile pour démontrer la correction de l'algorithme
- Un variant est une quantité qui **décroît** à chaque itération d'une boucle et assure sa terminaison
- Drapeau hollandais

La prochaine fois

- Logique de Hoare
- Annotation de programmes

Test ou preuve ?

"Testing shows the presence, not the absence of bugs"
E. W. Dijkstra

Le test :

- valide une **implantation** plutôt qu'un algorithme
- permet rapidement d'éliminer des « bugs »
- peut être utilisé en cours de développement
- fait apparaître les limites du modèle

La preuve :

- fournit une **garantie** incontestable sur le fond de l'algorithme
- mais n'élimine pas (complètement) les erreurs de programmation
- nécessite des outils formels pour une utilisation à grande échelle

Bonus

Un problème de haricots

haricots (a, b)
Mettre a haricots blancs et b haricots noirs dans un sac
while *le sac contient au moins deux haricots*
    Tirer deux haricots au hasard dans le sac
    if *c'est deux noirs*
        Remettre un haricot noir dans le sac
    else if *c'est deux blancs*
        Remettre un haricot noir dans le sac
    else
        Remettre un haricot blanc dans le sac
Regarder la couleur du dernier haricot

Devinette

Quelle est la probabilité d'avoir un haricot blanc à la fin ?