Exercices de Graphe

Nadia Brauner

Université Grenoble Alpes

1 Graphes

Exercice 1 : **Qui a tué le Duc de Dunsmore ?** (d'après Claude Berge)

Un jour, Sherlock Holmes reçoit la visite de son ami Watson que l'on avait chargé d'enquêter sur un assassinat mystérieux datant de plus de 10 ans. A l'époque, le Duc de Graphistan avait été tué par l'explosion d'une bombe, qui avait également détruit le château de Graphistan où il s'était retiré. Les journaux d'alors relataient que le testament, détruit lui aussi par l'explosion, avait tout pour déplaire à l'une de ses 7 ex-femmes. Or, avant sa mort, le Duc les avait toutes invitées à passer quelques jours dans sa retraite écossaise.

Holmes - Je me souviens de l'affaire ; ce qui est étrange, c'est que la bombe avait été fabriquée spécialement pour être cachée dans l'armure de la chambre à coucher, ce qui suppose que l'assassin a nécessairement effectué plusieurs visites au château !

Watson - Certes, et pour cette raison, j'ai interrogé chacune des ex-épouses : Ann, Betty, Charlotte, Edith, Félicia, Georgia et Helen. Elles ont toutes juré qu'elles n'avaient été au château de Graphistan qu'une seule fois dans leur vie.

Holmes - Hum ! leur avez-vous demandé à quelle période ont eu lieu leurs séjours respectifs ?

Watson - Hélas, aucune ne se rappelait les dates exactes, après 10 ans ! Néanmoins, je leur ai demandé qui elles y avaient rencontré :

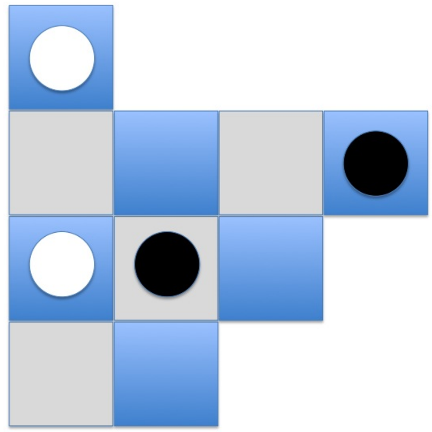
- Ann a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia, Georgia ;
- Betty a déclaré y avoir rencontré Ann, Charlotte, Edith, Félicia, Helen ;
- Charlotte a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith ;
- Edith a déclaré y avoir rencontré Betty, Charlotte, Félicia ;
- Félicia a déclaré y avoir rencontré Ann, Betty, Edith, Helen ;
- Georgia a déclaré y avoir rencontré Ann, Helen ;
- Helen a déclaré y avoir rencontré Betty, Félicia, Georgia.

Vous voyez mon cher Holmes, ces réponses sont concordantes !

C'est alors que Holmes prit un crayon et dessina un étrange petit dessin. Puis, après moins de 30 secondes, Holmes s'écria : "tiens, tiens ! Ce que vous venez de dire détermine de façon unique l'assassin".

Question 1 – Mais qui donc est l'assassin ?

Exercice 2 : **Échange de cavaliers** (Jean-Paul Davalan)
Pour résoudre ce casse-tête vous devez échanger les positions des deux cavaliers blancs avec celles des deux noirs, en respectant évidemment les règles du déplacement du cavalier sur un échiquier et en n'utilisant que les dix cases dessinées.



Question 1 – Modéliser le problème à l'aide d'un graphe.

Question 2 – Utiliser cette modélisation pour résoudre ce casse-tête.

Question 3 – Y-a-t-il des cases inutiles ?

Exercice 3 : Dessiner tous les graphes à 3 et 4 sommets, à isomorphisme près.

Exercice 4 : (N. Trotignon) Déterminer tous les graphes auto-complémentaires à 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 sommets. Pour les courageux : il y a 10 graphes auto-complémentaires à 8 sommets. Les trouver.

Exercice 5 : (N. Trotignon) Montrer qu'un graphe auto-complémentaire possède $4a$ ou $4a+1$ sommets. Réciproquement, montrer que pour tout a il existe un graphe auto-complémentaire sur $4a$ sommets, et un graphe auto-complémentaire sur $4a+1$ sommets.

Exercice 6 : **Séquence de degrés**

On dit que séquence de nombres entiers est *réalisable* s'il existe un graphe dont les sommets ont exactement les degrés de la séquence.

Question 1 – Pour chaque séquence qui suit, dites si la séquence est réalisable ou non. Si la réponse est oui, dessinez un tel graphe et dire s'il est unique (à isomorphisme près), sinon justifiez pourquoi il n'y a pas de tel graphe.

a. $(1; 2; 2; 4; 5; 5)$
b. $(2; 2; 2; 2; 2; 2)$
c. $(1; 1; 1; 1; 1; 1)$
d. $(3; 3; 3; 3; 3; 5)$
e. $(2; 2; 2; 3; 3; 3)$
f. $(0; 2; 2; 3; 4; 5)$
g. $(5; 5; 5; 5; 2; 2)$

Question 2 – Donnez des conditions nécessaires pour qu'une séquence soit réalisable. Sont-elles suffisantes ?

Exercice 7 : Montrez qu'il y a au moins deux personnes qui ont le même nombre d'amis sur Facebook. Vous préciserez clairement à quoi correspondent les sommets, les arêtes et quel est le problème de graphe considéré.

Exercice 8 : **Le professeur McBrain**

Le professeur McBrain et son épouse Muriel donnent une surprise-partie à laquelle ils invitent 4 autres couples mariés. À l'arrivée, certaines paires de personnes se sont serrées la main (bien sûr, aucun couple marié ne se serre la main). À la fin de la soirée, le professeur demande à chacune des 9 personnes, à combien de personnes elles ont serré la main au début de la soirée et il obtient 9 réponses différentes.

Question 1 – À combien de personnes Muriel a-t-elle serré la main ?

Exercice 9 : **Conseil municipal**

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :

— Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement ;
— Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun.

Question 1 – Combien y'a t-il de membres dans le conseil municipal ?

Exercice 10 : Sept étudiants partent en vacances. Ils décident que chacun enverra une carte à trois autres. Est-il posible que chaque étudiant recoivent des cartes postales précisément de la part des trois personnes auxquelles il en a envoyé ?

2 Chemins et cycles

Exercice 11 : **Sans lever le crayon**

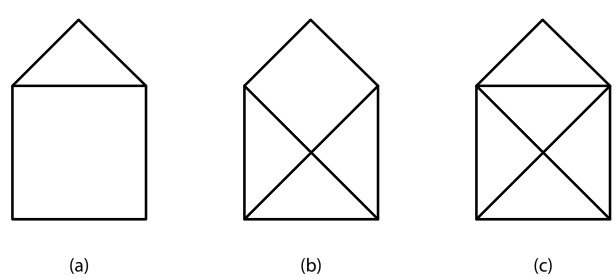


FIGURE 1 –

Question 1 – Quels dessins dans la Figure 1 peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?

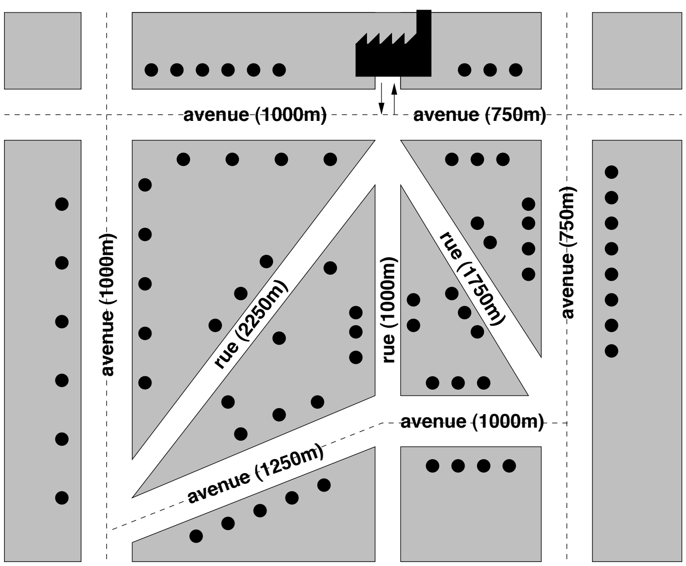
Exercice 12 : Montrer qu'un graphe simple de degré minimum au moins k contient une chaîne élémentaire de longueur k.

Exercice 13 : Soit G un graphe non orienté. Montrer qu'un moins un des deux graphes, G ou son complémentaire, est connexe.

Exercice 14 : Est-il possible de tracer une courbe, sans lever le crayon, qui coupe chacun des 16 segments de la figure suivante exactement une fois ?

Exercice 15 : **Ramassage des poubelles**

Voici le plan simplifié d'un quartier de Propreville. Une benne venant de l'usine d'incinération doit vider les 70 conteneurs indiqués sur le croquis et revenir à l'usine.



La circulation sur les avenues et sur les rues est dans les deux sens. La vitesse du camion-benne à vide (ou entre deux ramassages) est de 30km/h et il est le même dans les deux sens. Il faut compter 30 secondes pour vider un conteneur. Chaque avenue a deux voies et il faut réaliser le ramassage indépendamment de chaque coté, ce qui nécessite deux passages de la benne (un dans chaque sens). Le ramassage sur les trois rues se fait des deux cotés en même temps.

Question 1 – Trouver le trajet optimal qui minimise le temps total du parcours nécessaire pour ramasser toutes les ordures.

Exercice 16 : **Les dominos**

On considère des dominos dont les faces sont numérotées 1, 2, 3, 4 ou 5.

Question 1 – En excluant les dominos doubles, de combien de dominos dispose-t-on ?

Question 2 – Montrez que l'on peut arranger ces dominos de façon à former une boucle fermée (en utilisant la règle habituelle de contact entre les dominos).

Question 3 – Pourquoi n'est-il pas nécessaire de considérer les dominos doubles ?

Question 4 – Si l'on prend maintenant des dominos dont les faces sont numérotées de 1 à n, est-il possible de les arranger de façon à former une boucle fermée ?

3 Coloration

Exercice 17 : **Les roues**

Une roue d'ordre n est un graphe à n sommets constitué d'un cycle à n sommets (appelons ses sommets $v_1, \ldots, v_n$) auquel on ajoute un sommet u tel que uv_i est une arête pour tout i (voir figure ci-dessous). On note R_n la roue d'ordre n.

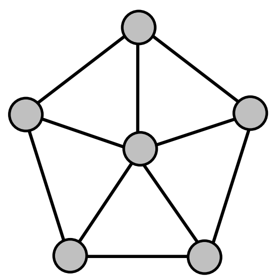


Figure 2 – La roue d'ordre 5 (le sommet u est celui qui se trouve au centre de la roue).

Question 1 – Démontrer que $\chi(R_n) = 3$ si $n \geq 4$ est pair et $\chi(R_n) = 4$ si $n \geq 3$ est impair.

Exercice 18 : **Produits chimiques**

Huit lots de produits chimiques doivent être expédiés par avion depuis Saint-Denis (île de la Réunion) à la station scientifique de Port-aux-Français (îles Kerguélen). Pour des raisons de sécurité, certains de ces produits chimiques ne peuvent pas être transportés dans le même container. En effet, les produits interagissent entre eux et il est risqué de les stocker dans un même container si les lots ne sont pas parfaitement étanches. Les produits sont notés $P_1, \ldots, P_8$. La table ci-dessous liste les interactions entre les produits chimiques. Par exemple, le produit P_1 peut être placé dans le même container que les produits P_3, P_4, P_7 et P_8, mais ne peut pas être placé avec P_2, P_5 ou P_6.

P_1 : P_2, P_5, P_6	P_2 : P_1, P_3, P_5, P_7	P_3 : P_2, P_4, P_7
P_4 : P_3, P_6, P_7, P_8	P_5 : P_1, P_2, P_6, P_7, P_8	P_6 : P_1, P_4, P_5, P_8
P_7 : P_2, P_3, P_4, P_5, P_8	P_8 : P_4, P_5, P_6, P_7	

Le prix de l'envoi d'un container est de 3000 euros. On peut supposer qu'il n'y a pas de contrainte de capacité sur les containers (c.-à-d. un container peut contenir un nombre maximum de n lots, avec $n \geq 8$).

Question 1 – Donner le prix minimum de l'envoi des huit lots de produits chimiques ainsi que la répartition des lots de produits chimiques dans les containers. Justifier soigneusement. (Indice : ne réinventez pas la roue !).

Exercice 19 :

On rappelle que $\chi(G)$ désigne le nombre chromatique de G, c'est-à-dire le nombre minimum de couleurs nécessaires pour colorier les sommets de G de sorte que deux sommets voisins n'aient pas la même couleur.

On note $\Delta(G)$ le degré maximum d'un sommet de G.

Question 1 – Démontrer que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \Delta(G) + 1$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) < \Delta(G) + 1$.

Soit $\omega(G)$ le nombre de sommets de la plus grande clique de G. On rappelle qu'une clique est un sous-graphe partiel qui est complet.

Question 2 – Démontrer que $\chi(G) \geq \omega(G)$ pour tout graphe G. Donner des graphes G tels que $\chi(G) = \omega(G)$, et donner des graphes G tels que $\chi(G) > \omega(G)$.

Soit M_0 le graphe K_2. Par récurrence on définit M_{n+1} en fonction de M_n, $n \geq 0$, de la façon suivante :

- si $v_1, \ldots, v_k$ sont les sommets de M_n, alors les sommets de M_{n+1} sont $v_1, \ldots, v_k, w_1, \ldots, w_k, u$
- si v_iv_j est une arête de M_n alors v_iv_j est aussi une arête de M_{n+1}
- si v_iv_j est une arête de M_n alors w_iv_j est une arête de M_{n+1}
- uw_i est une arête de M_{n+1} pour tout $i = 1, \ldots, k$

Question 3 – Démontrer que M_1 est un cycle à 5 sommets.

Question 4 – Démontrer que M_n a $3 \times 2^n - 1$ sommets pour tout $n \geq 0$.

Question 5 – Démontrer par récurrence sur n que $\omega(M_n) = 2$ pour tout $n \geq 0$.

Question 6 – Démontrer par récurrence sur n que $\chi(M_n) = 2 + n$ pour tout $n \geq 0$.

Les deux questions précédentes montrent qu'il peut y avoir un écart arbitrairement grand entre $\omega(G)$ et $\chi(G)$. Les graphes de la famille $(M_n)_{n\geq 0}$ sont appelés *graphes de Mycielski* en l'honneur du mathématicien du même nom.