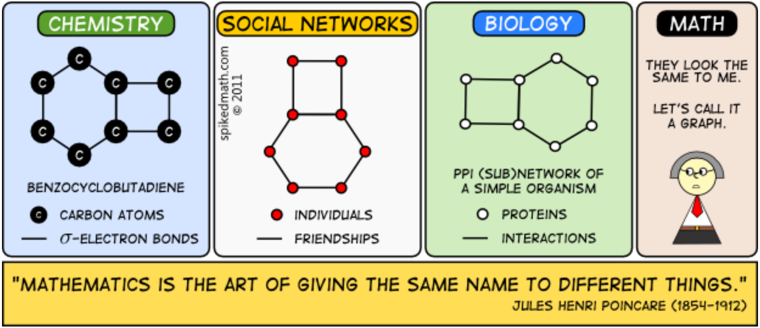
Optimisation dans les graphes



Optimisation dans les graphes

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Objectifs

- Modéliser un problème pratique à l'aide d'un graphe
- Notions et vocabulaire de base sur les graphes
- Modélisation avec les graphe Eulérien, Hamiltoniens, Coloration
- Connaître les trois étapes d'une preuve algorithmique (exécution, terminaison, validité du résultat)

Cours ouvert de Graphe sur Caseine

- Les graphes
- Cheminements (Graphes Eulériens, Hamiltoniens)
- Coloration

Jeu de piste en graphistan

Graphes

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

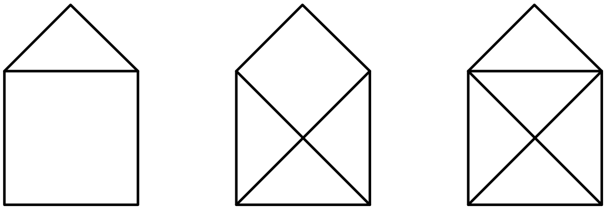
G-SCOP
SCIENCES POUR LA CONCEPTION, L'OPTIMISATION ET LA PRODUCTION

UNIVERSITÉ Grenoble Alpes

Plan

Plan

Modélisation



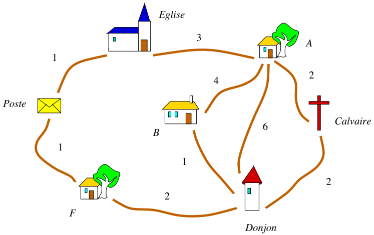
(a) (b) (c)

Modélisation

Modélisation

D'autres exemples ?

- Faire toutes les pistes de ski d'une station
- Postier
- Ramassage des poubelles

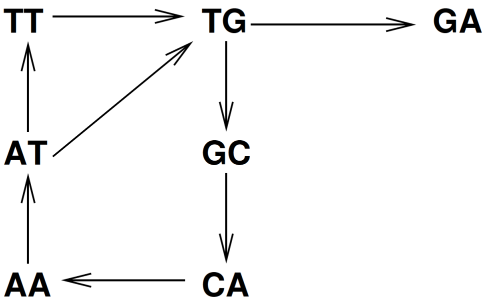


Modélisation

AAT,ATG,ATT,CAA,GCA,TGA,TGC,TTG

Modélisation

AAT,ATG,ATT,CAA,GCA,TGA,TGC,TTG



Exemple emprunté à Frédéric Guinand

Modélisation

L'utilisation judicieuse d'un graphe peut rendre certains problèmes concrets accessibles à un raisonnement mathématique

Modéliser avec des graphes

- une ensemble d'objets homogènes
  (étudiants, employés, machines, usines, carrefours...)
- les liens entre ces objets
  (est plus habile, est dans le même atelier, collabore avec, est relié par une route...)

Modélisation

Des graphes de la vie courante

- Internet (promenade entre pages web)
- Règles d'un jeu fini (échec, dames. . .)
- Plans des lignes de transport en commun
- Réseau des amis sur Facebook

D'autres graphes

- Molécules chimiques
- Circuits imprimés
- Factorisations d'un nombre

Modélisation

Décrire

- les sommets
- les arêtes, arcs
- la pondération des arcs
- la question associée

Le GPS

- les sommets : carrefours
- les arcs : rues orientées
- la pondération des arcs : longueurs
- la question associée : plus court chemin entre deux sommets

Modélisation

Quelques problèmes concrets

- Cheminement
  - GPS
  - Organisation de projet
  - Procédé de fabrication le plus sûr
- Compatibilité
  - Organisation de sessions d'examens
  - Cuisson de lots dans des fours
- Recherche multicritère de solution dominantes
- Affectation de ressources sur un projet
- Flots
  - Acheminement de pétrole via un réseau d'oléoducs,
  - Fluidification du trafic automobile dans une ville

Modélisation

Quelques problèmes concrets

- Connexité
  - Accessibilité dans un réseau de transport
  - Réseau souterrain du campagnol terrestre 2-connexe
  - Fiabilité dans les réseaux

Plan

1. Modélisation à l'aide des graphes
2. Notions de base sur les graphes
3. Degrés
4. Quelques graphes célèbres

Graphes

Graphe fini : $G = (V, E)$ où

- V est un ensemble fini
- E est un ensemble de couples non ordonnés d'éléments de V

Cycle à 3 sommets : $V = \{1, 2, 3\}$ $E = \{12, 23, 13\}$ [1]

couple non ordonné : $12 \equiv 21$

1. Formellement E est inclus dans l'ensemble des parties à deux éléments de V et uv devrait s'écrire $\{u, v\}$. Donc $uu \notin E$

Graphes

Terminologie

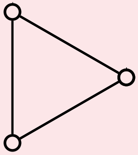
- G : Graphe [*Graph*]
- V : ensemble des sommets du graphe [*Vertices*]
- E : ensemble des arêtes du graphe [*Edges*]

Graphes

Représentation graphique

- V : sommets $\rightarrow$ points
- E : arêtes $\rightarrow$ traits (reliant les points)

Représentation graphique du cycle à 3 sommets



Graphes

Représentation graphique

Dessiner les graphes suivants :

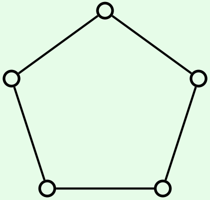
- Les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.
- Les sommets du graphe sont tous les sous ensembles à deux éléments de $\{1, 2, 3, 4\}$ deux sommets sont reliés si leur intersection est non vide.
- Graphe associé à la situation : Trois pays envoient chacun à une conférence deux espions qui ne se connaissent pas, chaque espion doit entrer en contact avec tous les espions des autres pays.

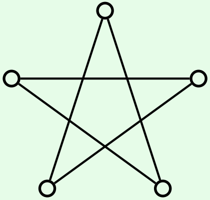
(IREM d'Aix-Marseille)

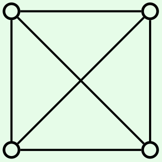
Graphes

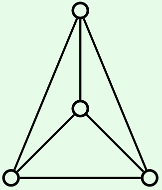
Représentation graphique

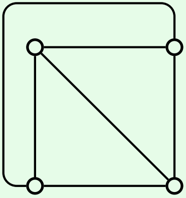
Est-ce le même graphe ?









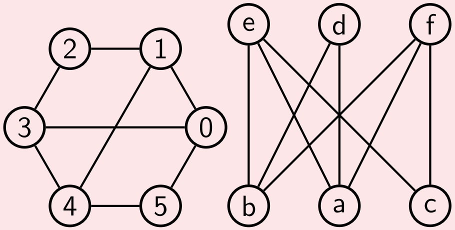


Graphes

G est **isomorphe** à H :

- $\exists$ une bijection $f : V(G) \to V(H)$
- $\forall x, y \in V(G)$, on a $xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$

Bijection entre les sommets qui préserve les arêtes [2]



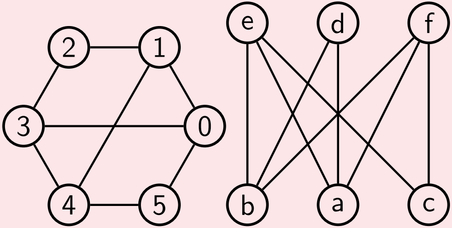
2. bien sur, $G = (V(G), E(G))$. On avait omit jusque là car il n'y avait pas d'ambiguité.

Graphes

G est **isomorphe** à H :

- $\exists$ une bijection $f : V(G) \to V(H)$
- $\forall x, y \in V(G)$, on a $xy \in E(G) \Leftrightarrow f(x)f(y) \in E(H)$

Bijection entre les sommets qui préserve les arêtes [2]



$1 \mapsto$ b	$2 \mapsto$ d
$3 \mapsto$ a	$4 \mapsto$ e
$5 \mapsto$ c	$0 \mapsto$ f

2. bien sur, $G = (V(G), E(G))$. On avait omit jusque là car il n'y avait pas d'ambiguité.

Graphes

$\overline{G}$ est le **complémentaire** de G :

- même ensemble de sommets
- les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de G :
  $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\overline{G})$

Graphes

$\overline{G}$ est le **complémentaire** de G :

- même ensemble de sommets
- les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de G :
  $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\overline{G})$

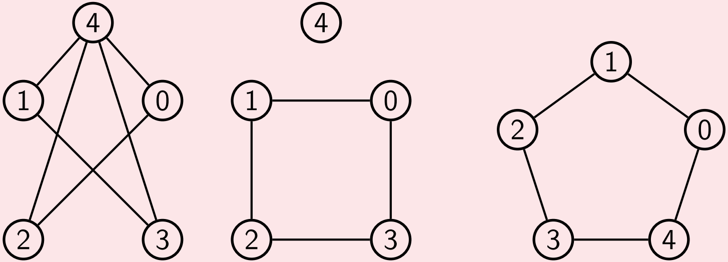
Un graphe est **auto-complémentaire**
s'il est isomorphe à son complémentaire

Graphes

$\overline{G}$ est le **complémentaire** de G :

- même ensemble de sommets
- les arêtes de $\overline{G}$ sont les non-arêtes de G :
  $uv \in E(G) \Leftrightarrow uv \notin E(\overline{G})$

Un graphe est **auto-complémentaire**
s'il est isomorphe à son complémentaire



Plan

Degrés

Dans un groupe de vingt enfants, est-il possible que sept d'entre eux aient chacun exactement trois amis, neuf d'entre eux en aient exactement quatre, et quatre d'entre eux exactement cinq ?

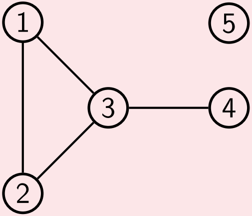
Degrés

- i et j sont les **extrémités** de $ij \in E$
- e est **incidente** à i si i est extrémité de e
- i et j sont **voisins** ou adjacents si $ij \in E$
- $N(u)$, le **voisinage** du sommet u est ensemble des voisins de u

Degrés

Degré d'un sommet $d(v)$: nombre d'arêtes incidentes à v

$$d(v) = |N(v)|$$



$$d(1) = 2 = d(2), \quad d(3) = 3, \quad d(4) = 1, \quad d(5) = 0$$

- v est **isolé** si $d(v) = 0$

Degrés

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

Degrés

Théorème

Soit $G = (V, E)$ *un graphe. Alors,* $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

chaque arête *uv* contribue à

- 1 dans le degré de *u*
- 1 dans le degré de *v*

Degrés

Théorème

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors, $\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$.

chaque arête uv contribue à

- 1 dans le degré de u
- 1 dans le degré de v

Corollaire

Le nombre de sommets de degré impair est pair.

Degrés

Soit $G = (V, E)$ avec $V = \{a, b, c, d\}$ et $E = \{ab, ac, ad, bd\}$.

- Quel est l'ordre du graphe ?
- Quels sont les sommets adjacents à d ?
- Combien y-a-t-il d'arêtes incidentes à c ?
- Quel est le degré de d ?

Est-ce qu'il existe un graphe simple avec la séquence de degrés suivante ? s'il existe, trouver un tel graphe. Sinon, expliquer pourquoi.

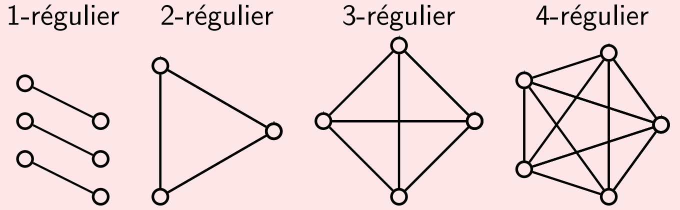
(a) $(1\,;2\,;2\,;4\,;5\,;5)$
(b) $(2\,;2\,;2\,;2\,;2\,;2)$
(c) $(1\,;1\,;1\,;1\,;1\,;1)$
(d) $(3\,;3\,;3\,;3\,;3\,;5)$
(e) $(2\,;2\,;2\,;3\,;3\,;3)$
(f) $(0\,;2\,;2\,;3\,;4\,;5)$
(g) $(5\,;5\,;5\,;5\,;2\,;2)$

Degrés

Montrer que sur Facebook, il y a toujours au moins deux personnes qui ont exactement le même nombre d'amis.

Degrés

- G est K-**régulier** si $\quad d(v) = K \quad \forall v \in V$



Graphe complet d'ordre $K+1$:

- graphe K-régulier à $K+1$ sommets
- noté K_{K+1}

Existe-t-il des graphes réguliers autres que les graphes complets ?

Degrés

Dessiner K_n pour $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

Combien K_n a-t-il d'arêtes ?

Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions, qui obéissent aux règles suivantes :
Règle 1 : tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement.
Règle 2 : deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun ;
Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

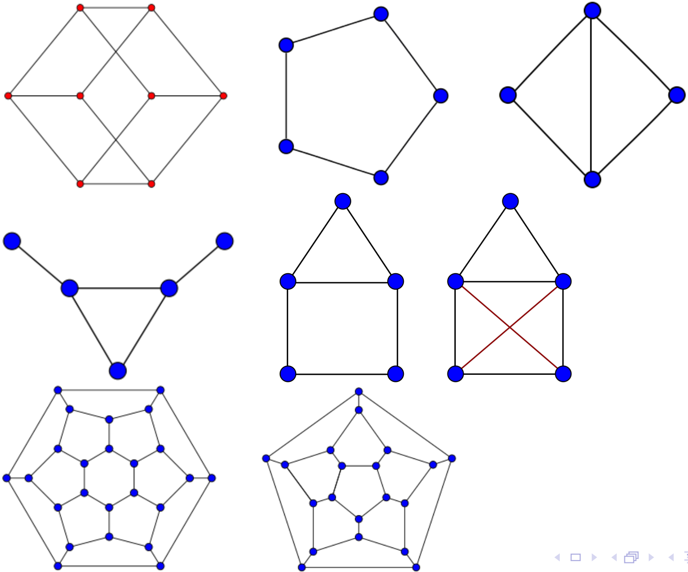
(IREM d'Aix-Marseille)

Plan

Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

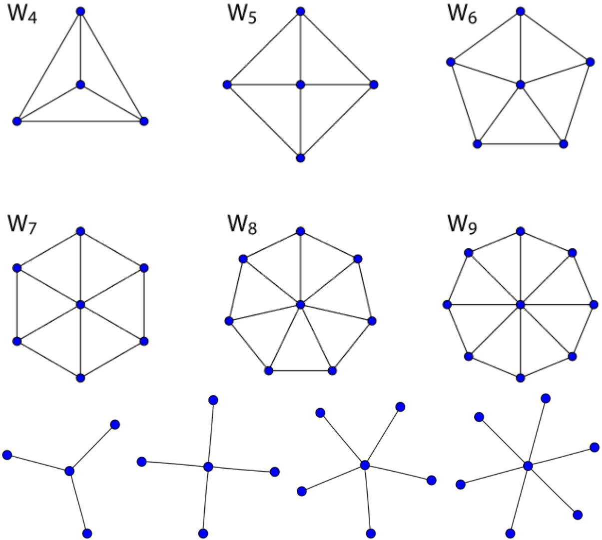
source : wikipedia



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

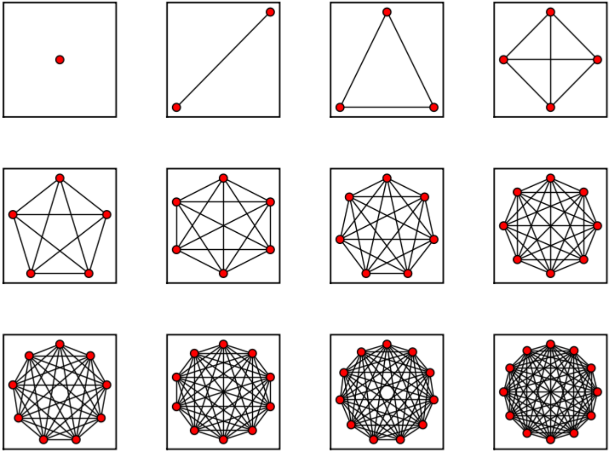
source : wikipedia



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

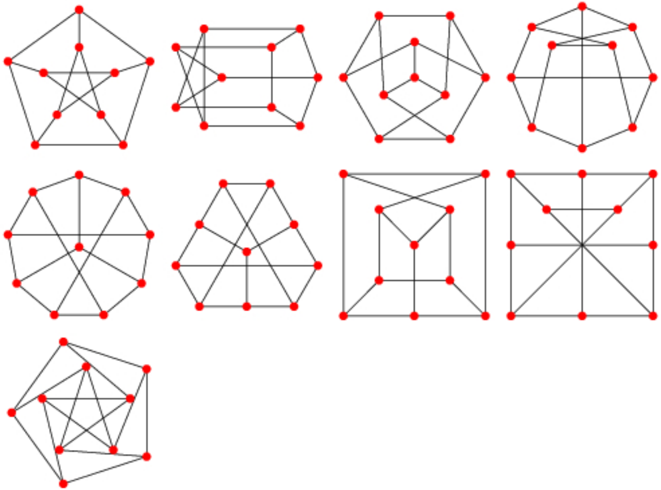
source : Wolfram MathWorld



Quelques graphes célèbres

Saurez-vous retrouver leurs noms ?

source : Wolfram MathWorld



Cheminements

Nadia Brauner et Yann Kieffer

Nadia.Brauner@imag.fr

G-SCOP Sciences pour la conception, l'optimisation et la production

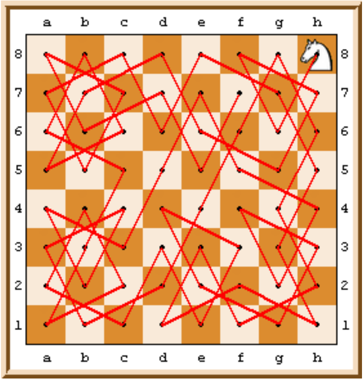
Université Grenoble Alpes

Plan

Plan

Chaînes

- se promener / parcourir / traverser un graphe
- pour savoir où on va / aller vite / aller loin / aller partout



Camion poubelle, voiture google map, plus court chemin

Chaînes

Chaîne : séquence alternée de sommets et d'arêtes

$$(x_0, e_1, x_1, e_2 \ldots x_{k-1}, e_k, x_k) \quad \text{où} \quad x_i \in V \quad e_i = x_{i-1}x_i \in E$$

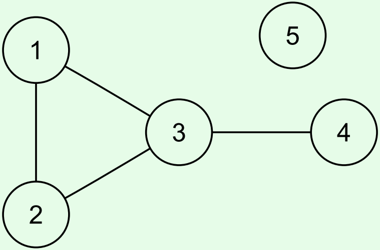
- Chaîne de x_0 à x_k
- x_0x_k-chaîne
- x_0, x_k sont les **extrémités** de la chaîne
- si pas d'ambiguïté : $(x_0, x_1, \ldots x_{k-1}, x_k)$

Les x_i ne sont pas nécessairement distincts

Chaînes

Chaînes

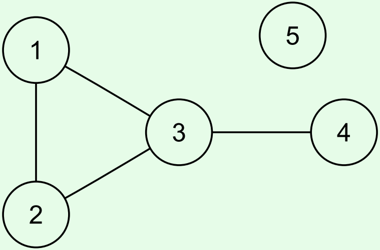
Décrivez 10 chaînes dans le graphe suivant



Chaînes

Chaînes

Décrivez 10 chaînes dans le graphe suivant



- nombre infini de chaînes

Chaînes

Chaîne simple : pas de répétition d'arêtes
(tous les e_i distincts)

Chaîne élémentaire : chaque sommet apparaît une seule fois
(tous les x_i distincts, sauf éventuellement $x_0 = x_k$)

- élémentaire $\Rightarrow$ simple
- nombre fini de chaînes simples

Longueur d'une chaîne = nb d'arêtes = k = nb de sommets -1

Chaînes

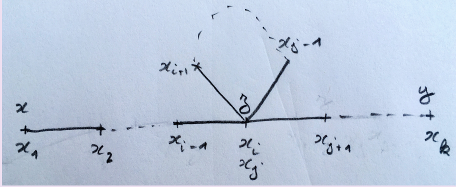
$\exists$ chaîne de x à $y \Rightarrow \exists$ chaîne élémentaire de x à y

Chaînes

$\exists$ chaîne de x à y $\Rightarrow$ $\exists$ chaîne élémentaire de x à y

Données : C une chaîne de x à y
Résultat : Une chaîne élémentaire de x à y
tant que *C n'est pas élémentaire* **faire**
  $\exists$ un sommet z qui apparaît deux fois dans C.
    la chaîne entre deux occurrences de z devient z
retourner C

$(x_1 = x \dots x_i = z \dots x_j = z \dots x_k = y)$ devient $(x_1 = x \dots x_{i-1}, z, x_{j+1} \dots x_k = y)$



Chaînes

Données : C une chaîne de x à y

Résultat : Une chaîne élémentaire de x à y

tant que C *n'est pas élémentaire* **faire**

  $\exists$ un sommet z qui apparaît deux fois dans C.

  on remplace la chaîne entre deux occurrences de z par z

retourner C

1. *l'algorithme s'exécute correctement*

Chaînes

Données : C une chaîne de x à y
Résultat : Une chaîne élémentaire de x à y
tant que C *n'est pas élémentaire* **faire**
  $\exists$ un sommet z qui apparaît deux fois dans C.
    on remplace la chaîne entre deux occurrences de z par z
retourner C

1. *l'algorithme s'exécute correctement*
2. *en un nombre fini d'étapes*

Chaînes

Données : C une chaîne de x à y
Résultat : Une chaîne élémentaire de x à y
tant que C *n'est pas élémentaire* **faire**
  $\exists$ un sommet z qui apparaît deux fois dans C.
    on remplace la chaîne entre deux occurrences de z par z
retourner C

1. *l'algorithme s'exécute correctement*
2. *en un nombre fini d'étapes*
    - la longueur de C décroît strictement et est positive
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité* :

Chaînes

Données : C une chaîne de x à y
Résultat : Une chaîne élémentaire de x à y
tant que *C n'est pas élémentaire* **faire**
  $\exists$ un sommet z qui apparaît deux fois dans C.
    on remplace la chaîne entre deux occurrences de z par z
retourner C

1. *l'algorithme s'exécute correctement*
2. *en un nombre fini d'étapes*
   - la longueur de C décroît strictement et est positive
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité* :
   - à chaque étape, C est une chaîne de x à y
   - sortie du **tant que** avec une chaîne élémentaire de x à y

vérifier les conditions aux bord si $x = z$ par exemple

Chaînes

$\exists$ chaîne de x à $y \Rightarrow \exists$ chaîne élémentaire de x à y

Preuve alternative

Parmi toutes les chaînes reliant x à y, choisissons une chaîne $C = (x_1 = x, x_2 ... x_k = y)$ comportant le moins d'arêtes. Supposons par l'absurde que C n'est pas élémentaire. Il existe alors un sommet z apparaissant au moins 2 fois dans C. Soient i et j les 2 premiers indices tels que $x_i = z$ et $x_j = z$. On "supprime" le cycle entre $x_i = z$ et $x_j = z$. Alors $C' = (x_1 = x ... x_{i-1}, z, x_{j+1} ... x_k = y)$ est une chaîne, reliant x à y. Sa longueur est strictement inférieure à celle de C, ce qui contredit le choix de C comme étant une plus courte chaîne.

Chaînes

$\exists$ chaîne de x à $y \Rightarrow \exists$ chaîne élémentaire de x à y

Preuve alternative, mais identique en fait

Parmi toutes les chaînes reliant x à y, choisissons une chaîne $C = (x_1 = x, x_2 ... x_k = y)$ comportant le moins d'arêtes. Supposons par l'absurde que C n'est pas élémentaire. Il existe alors un sommet z apparaissant au moins 2 fois dans C. Soient i et j les 2 premiers indices tels que $x_i = z$ et $x_j = z$. On "supprime" le cycle entre $x_i = z$ et $x_j = z$. Alors $C' = (x_1 = x ... x_{i-1}, z, x_{j+1} ... x_k = y)$ est une chaîne, reliant x à y. Sa longueur est strictement inférieure à celle de C, ce qui contredit le choix de C comme étant une plus courte chaîne.

Plan

Connexité

$G = (V, E)$ **connexe** ssi pour tout $x, y \in V, x \neq y$, il existe dans G une chaîne de x à y

Connexité

$G = (V, E)$ **connexe** ssi pour tout $x, y \in V, x \neq y$, il existe dans G une chaîne de x à y

$x \sim y$ s'il existe une chaîne de x à y

$\sim$ est une **relation d'équivalence**
(réflexive, symétrique et transitive).

Composantes connexes = classes d'équivalences pour $\sim$

Connexité

$G = (V, E)$ **connexe** ssi pour tout $x, y \in V, x \neq y$, il existe dans G une chaîne de x à y

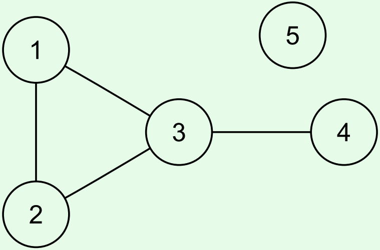
$x \sim y$ s'il existe une chaîne de x à y

$\sim$ est une **relation d'équivalence**
(réflexive, symétrique et transitive).

Composantes connexes $=$ classes d'équivalences pour $\sim$

G est connexe $\Leftrightarrow$ G a une seule composante connexe

Connexité



- Combien le graphe a-t-il de composantes connexes ?
- Est-il connexe ?

Connexité

Lien entre nombre d'arêtes et connexité

Un graphe G d'ordre n connexe comporte au moins $n-1$ arêtes.

Connexité

Lien entre nombre d'arêtes et connexité

Un graphe G d'ordre n connexe comporte au moins $n-1$ arêtes.

Induction sur l'ordre du graphe
$\mathbf{n}=\mathbf{1}$ La propriété est clairement vraie.

Supposons la propriété prouvée sur les graphes d'ordre inférieur à n. Considérons un graphe $G=(V,E)$ connexe d'ordre $n+1$.

Connexité

Cas 1 : Il existe dans G un sommet x de degré 1.
Une seule arête, appelons-la $e = (x, y)$, est alors incidente à x.
Considérons le graphe $G' = (V \backslash \{x\}, E \backslash \{e\})$.
Le graphe G' reste connexe : si l'on considère 2 sommets u et v, il existe dans G une chaîne C, que nous pouvons choisir élémentaire (Lemme précédent), reliant ces 2 sommets. Si une chaîne passe par x, alors elle doit passer deux fois par y. Or C est élémentaire. Donc, elle ne passe pas par x. Donc, C est également une chaîne de G' reliant u et v.
L'hypothèse d'induction impose que G' comporte au moins $n - 1$ arêtes. Cependant G possède exactement un sommet et une arête de plus que G'. Donc G possède n arêtes.

Connexité

Cas 2 : Il n'existe pas dans G de sommet de degré 1.
Puisque G est connexe d'ordre au moins 2, il ne peut exister de sommet isolé. Tout sommet de G est donc de degré au moins 2.
$2|E|$ doit alors être supérieur à $2|V|$, ce qui permet de conclure.

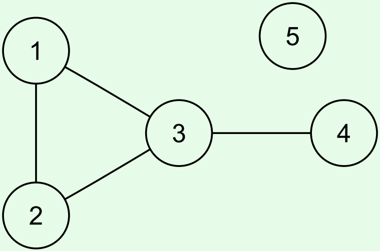
Plan

Cycles

Cycle : chaîne simple dont les deux extrémités sont le même sommet ($x_0 = x_k$)

Cycle élémentaire : chaque sommet apparaît une seule fois (sauf extrémités)

Quelle est la longueur minimale d'un cycle ?
Y-a-t-il dans le graphe suivant un cycle élémentaire ? Et un cycle non élémentaires ?



Cycles

Existence d'un cycle

Si dans un graphe G tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Cycles

Existence d'un cycle

Si dans un graphe G tout sommet est de degré supérieur ou égal à 2, alors G possède au moins un cycle.

Adaptez l'algorithme **Accessibilité(s)** pour montrer la propriété précédente.

Cycles

Cycle(x_0)

Données : un sommet x_0

Résultat : Un cycle

$k \leftarrow 0 \quad i \leftarrow x_0 \quad C \leftarrow (x_0)$

tant que *il existe* $j \notin C$ *tel que* $ij \in E$ **faire**

$k \leftarrow k + 1$

$x_k \leftarrow j$

ajouter x_k en queue de C

$i \leftarrow j$

Soit x_h avec $h < k - 1$ un voisin de x_k dans C

retourner $(x_k, x_h, x_{h+1}, \ldots, x_{k-1}, x_k)$

Cycles

1. *tout s'exécute correctement*

Cycles

1. *tout s'exécute correctement*
   - Tous les voisins de x_k sont dans C
     (sortie du **tant que** donc toutes les arêtes $x_k x$ vérifient $x \in C$)
   - $d(x_k) \geq 2$ donc x_k a dans C un voisin $\neq x_{k-1}$ (noté x_h)

Cycles

1. *tout s'exécute correctement*
   - Tous les voisins de x_k sont dans C
     (sortie du **tant que** donc toutes les arêtes $x_k x$ vérifient $x \in C$)
   - $d(x_k) \geq 2$ donc x_k a dans C un voisin $\neq x_{k-1}$ (noté x_h)
2. *en un nombre fini d'étapes*
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité*

Cycles

1. *tout s'exécute correctement*
   - Tous les voisins de x_k sont dans C
     (sortie du **tant que** donc toutes les arêtes $x_k x$ vérifient $x \in C$)
   - $d(x_k) \geq 2$ donc x_k a dans C un voisin $\neq x_{k-1}$ (noté x_h)
2. *en un nombre fini d'étapes*
3. *en cas d'arrêt, on obtient l'objet souhaité*
   - C est une chaîne élémentaire : chaque sommet au plus une fois
     ($x_h \neq x_{k-1}$) et $x_i x_{i+1} \in E$
   - $x_k x_h \in E$ et $x_k x_h$ n'est pas une arête de C et les deux
     extrémités du résultat sont identiques donc c'est un cycle

Cycles

Cette propriété simple implique qu'un graphe sans cycle possède au moins un sommet de degré 0 ou 1.

Graphes Eulériens et Hamiltoniens

Nadia Brauner

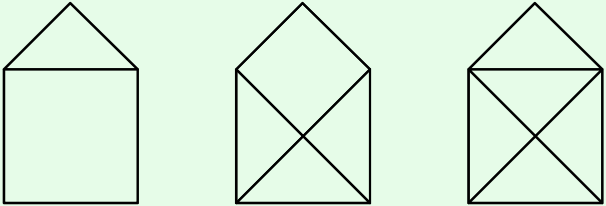
Nadia.Brauner@imag.fr

Plan

Plan

Chemin eulérien

Quels dessins peuvent être dessinés sans lever le crayon et sans passer deux fois sur le même trait ?



(a) (b) (c)

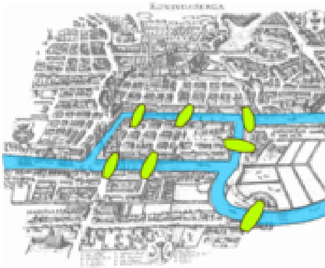
Chemin eulérien

Les ponts de Königsberg

Problème fondateur de la théorie des graphes, Euler, 1736

La ville de Königsberg (aujourd'hui Kaliningrad) est construite autour de deux îles reliées entre elles par un pont et six ponts relient le continent à l'une ou l'autre des deux îles.

Existe-t-il une promenade dans les rues de Königsberg permettant, à partir d'un point de départ au choix, de passer une et une seule fois par chaque pont étant entendu qu'on ne peut traverser le Pregel qu'en passant sur les ponts ?



Euler, 1707-1783

Il a même sa tête sur les billets de banque Suisses.

Chemin eulérien

Un **cycle eulérien** de $G = (V, E)$ est un cycle qui emprunte chaque arête de G une et une seule fois.

Remarque : le cycle peut ne pas être élémentaire, c'est-à-dire passer plusieurs fois par le même sommet.

Intérêt : tournée postale, ramassage des ordures, reconstitution de séquences d'ADN, alignement de transistors...

Chemin eulérien

Un graphe G est **eulérien** si et seulement si il existe un cycle eulérien dans G.

Chemin eulérien

Un graphe G est **eulérien** si et seulement si il existe un cycle eulérien dans G.

Théorème (Euler 1736)

G est eulérien si et seulement si

- *G est connexe et*
- *$d(v)$ est pair $\forall v \in V$.*

Chemin eulérien

"$\Rightarrow$" :

- G eulérien $\Rightarrow$ G connexe OK
- soit $v \in V$ un sommet qui apparait k fois dans le cycle eulérien C. Donc C contient k arêtes de la forme (x, v) (le cycle rentre k fois dans v) et k arêtes de la forme (v, x) (le cycle sort k fois de v). Comme C est simple (pas d'arêtes en double), $d(v) = 2k$ est pair.

Chemin eulérien

"$\Leftarrow$" : par l'absurde, supposons qu'il existe des graphes connexes dont tous les degrés sont pairs qui n'admettent pas de cycle eulérien.

- Soit G un tel graphe
- Soit C une plus grande chaîne simple (pas de répétition d'arête) de G (en nombre d'arêtes).

Chemin eulérien

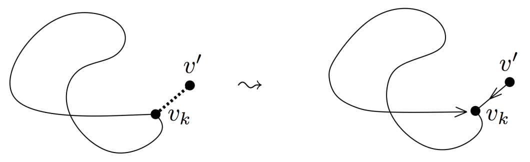
Cas 1 C n'est pas un cycle.

C est une chaîne. Les extrémités d'une chaîne ont un degré impair dans la chaîne. Comme le degré du sommet d'arrivée est pair, on a une arête qui en sort. On peut donc rajouter cette arête et ainsi rallonger la chaîne. contradiction avec la maximalité de C ✘.

Chemin eulérien

Cas 2 $C = (v_0, v_1 \ldots v_p, v_0)$ est un cycle. Il n'est pas eulérien par hypothèse.

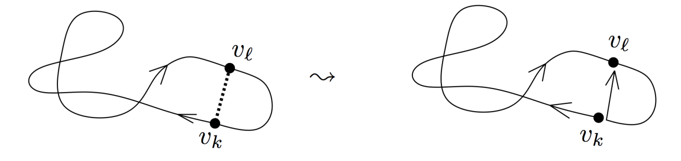
- **Cas 2.1** Il existe un sommet qui n'est pas dans C
  Comme le graphe est connexe, il existe une arête $v_k v'$ avec $v' \notin C$. La chaîne $(v', v_k, v_{k+1} \ldots v_p, v_0 \ldots v_{k-1}, v_k)$ contredit la maximalité de C.



Dessins de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Chemin eulérien

- **Cas 2.2** Tous les sommets sont dans C
  Il existe une arête $v_l v_k$ qui n'est pas dans C. La chaîne $(v_k, v_{k-1} \dots v_0, v_m \dots v_{k+1}, v_k, v_l)$ contredit la maximalité de C.



Dessins de *Invitation to mathematics* de Matoušek et Nešetřil

Chemin eulérien

Et si le graphe n'est pas eulérien

- Dans quel cas a-t-on une chaîne eulérienne ?
- Minimiser le nombre de chaînes pour parcourir toutes les arêtes (facile ?)
- Si le graphe est connexe autoriser à passer plusieurs fois par certaines arêtes. Minimiser la distance inutile parcourue (postier chinois, on en reparle plus tard)

Plan

Cycle Hamiltonien

Un **cycle hamiltonien** de $G = (V, E)$ est un cycle qui emprunte chaque sommet de G une et une seule fois.

Intérêt : Tâches à ordonnancer avec set-up, voyageur de commerce

Cycle Hamiltonien

Un graphe est **hamiltonien** si et seulement si il contient un cycle hamiltonien.

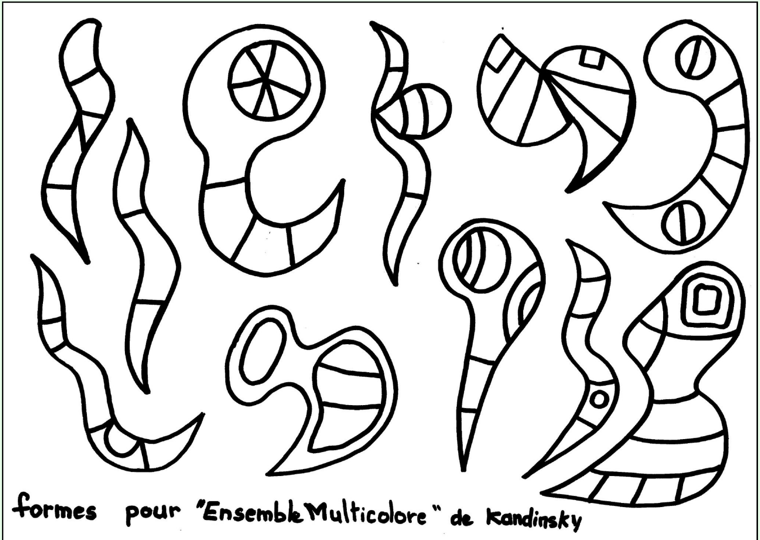
Commentaires : Graphes Eulérien et Hamiltonien sont chacun d'un coté de la frontière entre les classes P et NP-complet. Autant de bonnes caractérisations existent pour reconnaitre un graphe eulérien, autant le problème de graphe hamiltonien est difficile.

La généralisation de ce problème où on cherche un cycle hamiltonien de poids minimum dans un graphe pondéré a généré une très vaste littérature (=TSP). Mais nous y reviendrons plus tard...

Proposez un graphe simple d'ordre 5 pour chaque cas suivant :

1. G1 est hamiltonien et eulérien ;
2. G2 est hamiltonien et non eulérien ;
3. G3 est non hamiltonien et eulérien ;
4. G4 est non hamiltonien et non eulérien ;

Combien de fois devez vous lever le stylo au minimum pour reproduire ces formes inspirées de Kandinsky sans passer deux fois sur le même trait ?



Coloration

Nadia Brauner

Nadia.Brauner@imag.fr

Plan

Plan

Coloration

k-**coloration** de $G = (V, E)$
fonction $c : V \longrightarrow \{1, 2 \ldots k\}$ telle que $c(u) \neq c(v) \quad \forall uv \in E$

Les sommets de même couleur définissent un stable

Exemple

Nombre chromatique $\chi(G)$

- il existe une $\chi(G)$-coloration de G
- il n'existe pas de $\chi(G) - 1$-coloration de G

Est-ce que ce nombre est bien défini pour tout graphe ?

Coloration

Quelques graphes particuliers

Quel est le nombre chromatique des graphes suivants ? $(n \geq 2)$

- le graphe complet K_n
- la chaine sur n sommets
- le cycle sur n sommets

Quels sont tous les graphe G qui vérifient

- $\chi(G) = n$
- $\chi(G) = 1$
- $\chi(G) = 2$

Coloration

Le graphe G est biparti $\Leftrightarrow \chi(G) \leq 2$

Coloration de carte de géographie

- $V = \{$ Pays$\}$
- Arête entre deux pays ssi il y a une frontière commune
- On cherche $\chi(G)$

Théorème des 4 couleurs (voir One Idea, One Story sur Caseine)

Plan

Bornes

Rappels

- $\Delta(G)$, le **degré maximum** de G, est le plus grand degré d'un sommet de G : $\Delta(G) = \max_{v \in V} d(V)$
- $\omega(G)$ est le nombre maximum de sommets d'une clique de G

Bornes sur χ

Théorème

Soit $G = (V, E)$, un graphe. On a

$$\omega(G) \leq \chi(G) \leq \Delta(G) + 1$$

et ces deux bornes sont atteintes

Bornes

Preuve par **récurrence** sur n que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

- $H(n)$: soit G un graphe à n sommets, alors $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$
- $H(1)$ est clairement vraie
- Supposons que $H(n)$ est vraie pour $n \geq 1$. Montrons que $H(n+1)$ est vraie.
- Soit $G = (V, E)$ un graphe à $n+1$ sommets, $n \geq 1$.
- Soit $x \in V$ un sommet de G de plus grand degré, cad $d(x) = \Delta(G)$.
- Soit $G' = G[V \backslash \{x\}]$ le graphe obtenu à partir de G en supprimant x (ainsi que toutes les arêtes incidentes à x).

Bornes

- Par hypothèse de récurrence, $\chi(G') \leq \Delta(G') + 1$
- Or $\Delta(G') \leq \Delta(G)$
- Donc $\chi(G') \leq \Delta(G) + 1$
- On peut donc colorier G' avec au plus $\Delta(G) + 1$ couleurs
- Comme $d(x) = \Delta(G)$ et qu'au pire, les $\Delta(G)$ voisins de x utilisent $\Delta(G)$ couleurs, il reste une couleur pour x parmi les $\Delta(G) + 1$ couleurs disponibles
- On peut donc colorier G avec moins de $\Delta(G) + 1$ couleurs

Bornes

1. Si G' est un sous graphe de G, alors $\chi(G') \leq \chi(G)$
2. $\chi(K_n) = n$

donc $\omega(G) \leq \chi(G)$.

Bornes

Trouvez des exemples de graphes pour chacun des cas suivants

- $\omega(G) = \chi(G) < \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) < \chi(G) = \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) < \chi(G) < \Delta(G) + 1$
- $\omega(G) = \chi(G) = \Delta(G) + 1$
- $\chi(G) = \Delta(G) - k$ pour k quelconque

Algorithmes

Algorithme 2 : Un algorithme glouton de coloration

Données : un ordre $v_1, v_2 \dots, v_n$ sur les sommets de G
Résultat : une coloration de G

$c(v_1) = 1$
pour $i = 2$ *à* n **faire**
 $c(v_i) =$ la plus petite couleur non utilisée par les voisins déjà coloriés de v_i
retourner c

Algorithmes

Un algorithme glouton de coloration

- Proposez un graphe G et un ordre des sommets pour lesquels l'algorithme glouton utilise $\chi(G)$ couleurs
- Proposez un graphe G et un ordre des sommets pour lesquels l'algorithme glouton utilise strictement plus que $\chi(G)$ couleurs

$\Rightarrow$ Cet algorithme n'est PAS optimal

Remarque : pour tout graphe $G = (V, E)$ il existe un ordre $v_1, v_2 \ldots v_n$ tel que l'algorithme glouton colorie G avec $\chi(G)$ couleurs

Coloration

Un algorithme glouton de coloration

L'algorithme glouton utilise au pire $\Delta(G) + 1$ couleurs

À chaque étape l'algorithme glouton colorie un sommet qui a au plus $\Delta(G)$ voisins déjà coloriés

Remarque : ceci est une deuxième preuve que $\chi(G) \leq \Delta(G) + 1$

Coloration

Applications

nombreuses applications dans l'industrie, en ingénierie de l'organisation, en informatique. . .